Royaume du maroc
Ministère de l' Enseignement,
de la formation professionnelle
de l' Enseignement Supérieur, et de la Recherche Scientifique et de la Formation des cadres
Groupe Scolaire Aljabr.fes

chemin 2 Bac 2019-2020

MATHÉMATIQUES

Bac SM Internationale

12 Juin 2020

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques sont non autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 6 exercices indépendants. Le candidat doit traiter les 4 premiers exercices et doit choisir un parmi les deux derniers exercices (arithmétique ou structures algébriques). Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'ilest amené à prendre.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.
la première page est une page de garde

Exercice 1 Nombres complexes — 3,5pts

soit $m \in \mathbb{C} - \{\frac{1}{2}\}$

Partie I

on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_m) : z^2 - (2m+i)z + 2m^2 - m(1-i) = 0$

1. montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est $\Delta = (i(2m-1))^2$
2. on note par z_1 et z_2 les solution de (E_m) telle $z_1^2 = 2im^2$
   (a) déterminer z_1 et z_2
   (b) dans cette question on prend $m = \dfrac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}$ avec $\theta \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$ donner la forme trigonom étrique de z_1 et z_2

Partie II

le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

1. on considère les points $M(m)$,$M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$
2. montrer que $M_1M_2 = 2\left|m - \dfrac{1}{2}\right|$ en d éduire l'ensemble des points $M(m)$ tels que $M_1M_2 = 2$
3. montrer que les points $M(m)$,$M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont alignés si et seulement si $m \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$
4. soit f la transformation du plan d'expression complexe $z' = iz + m$
   (a) vérifier que $f(M) = M_1$
   (b) montrer que f est une rotation dont on donnera son centre et une mesure de son angle
5. soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1)$ et $B\left(\dfrac{1-i}{2}\right)$
   (a) montrer que si $m \notin \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ et $M(m) \in (\Gamma)$ alors les points O et $M(m)$,$M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ sont cocycliques

Exercice 3 analyse 1 — 7,5pts

Partie I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. Montrer que$f$ est paire et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. Etudier les variations de f
3. Montrer que pour$\forall x \in \mathbb{R} : |f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$
4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et que $\alpha \leq \dfrac{1}{2}$

5. soit g la réstriction de f à $\mathbb{R}^+$ montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera
6. donner l'expresion de $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$
7. tracer dans repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ les courbes représenatives de f et g^{-1}
8. soit $\lambda > 0$ on note par S_λ l'aire du domaine $D_\lambda = \{M(x,y) \in P / 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq f(x)\}$ calculer en fonction de λ l'aire S_λ et montrer que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} S_\lambda = \dfrac{\pi}{4}$
9. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

   (a) Montrer que, pour tout$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

   (b) Montrer que, pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Partie II

pour chaque n non nul on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{kn}}\right)$ et $s_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $s'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

1. (a) en utilisant TAF à la fonction $x \to \sqrt{x}$ montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* : 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

   (b) déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2\dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}\right)}{\sqrt{n}} \leq s_n \leq 2$ et déduire la limite de s_n

2. .

   (a) montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$ en déduire $\forall n \in \mathbb{N}^* : \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$

   (b) montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} s'_n = 0$

3. vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1 + \frac{u_n}{\sqrt{kn}}\right)$

4. .

   (a) montrer $\forall x \geq 0 : x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$

   (b) déduire que $u_n s_n - \frac{1}{2}u_n^2 s'_n \leq \ln(p_n) \leq u_n s_n$

   (c) déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

Exercice 4 Analyse 2 — 5,5pts

soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\int_1^x \sqrt{t\ln t}dt$

1. justifier que $D_f=[1,+\infty[$
2. soit $x>e$ justifier que $f(x)\geq \int_e^x \sqrt{t\ln t}dt$
3. déduire que pour tout $x>e$: $f(x)\geq \sqrt{e}(x-e)$ et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
4. montrer que f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$
5. déduire que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}^+$
6. montrer que pour tout entier naturel n il existe un unique $u_n\in[1,+\infty[$ tel que
$$\int_1^{\alpha_n}\sqrt{t\ln t}dt=n$$
7. montrer que la suite (α_n) est croissante
8. soit $x\in[1,+\infty[$
   montrer que $\forall t\in[1,+\infty[: \ln(t)<t$ et déduire que $f(x)\leq \dfrac{x^2-1}{2}$
9. montrer que en utilisant 8 que $\forall n\in\mathbb{N} : \alpha_n\geq\sqrt{2n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$
10. soit $x\geq e$
    (a) à l'aide d'une intégration par parties montrer que
    $$\int_e^x \sqrt{t}\sqrt{\ln t}=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln x}-2e^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int_e^x\sqrt{\frac{t}{\ln t}}dt$$
    (b) Montrer que $\int_e^x\sqrt{\frac{t}{\ln t}}dt\leq\int_e^x\sqrt{t}dt$
    (c) déduire un encadrement de $\dfrac{\int_e^x\sqrt{t}\sqrt{\ln t}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\ln x}}$
11. en utilisant la question 10 montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\alpha_n^{\frac{3}{2}}\ln\alpha_n}{n}=\dfrac{3}{2}$

Exercice 5 (structures algébriques) 1ier choix — 3,5pts

on définit sur $\mathbb{C}$ une loi de composition interne $*$ par

$$\forall(a,b,x,y)\in\mathbb{R}^4 : (a+ib)*(x+iy)=a+x+iby$$

1. montrer que $*$ est commutative et associative dans $\mathbb{C}$
2. montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on dé terminera
3. soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ montrer que $(a+ib)$ est symétrisable dans $(\mathbb{C},*)$ et son symétrique est $-a+\dfrac{1}{b}i$
4. soit $E=\{z\in C/\mathbf{Im}(z)>0\}$
   montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif
5. soit $H=\{x+i.2^x/x\in\mathbb{Z}\}$ montrer que $(H,*)$ est un sous groupe de $(E,*)$
6. on définit dans E la loi de composition interne $\top$ par
   pour chaque $(a,x)\in\mathbb{R}^2$ et pour chaque $(b,y)\in]0,+\infty[^2$: on pose
   $$(a+ib)\top(x+iy)=ax-\ln(b)\ln(y)+i.b^x.y^a$$
   (a) vérifier que $\top$ est bien une loi de composition interne dans E
   (b) montrer que $\top$ est commutative et distributive par rapport à $*$ dans E
7. soit l'application $f\ \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^* & \to & E\\ x+iy & \mapsto & x+i.e^y\end{array}$
   (a) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\top)$
   (b) montrer que $f(\mathbb{C}^*)=E-\{i\}$
   (c) Déduire que $(E,*,\top)$ est un corps commutatif
   (d) résoudre dans E l'équation $z\top z\top z=1+i$

Exercice 5 (arithmétique) 2ième choix — 3,5pts

on considère dans $\mathbb{N}^{*^3}$ l'équation $\left(x^2+xy+y^2\right)z=2021xy$

1. soit (x,y,z) une solution de E on pose $d=x\wedge y$ et $a=\dfrac{x}{d}$ et $b=\dfrac{y}{d}$
   (a) montrer que $a\wedge b=1$ et $\left(a^2+ab+b^2\right)z=2021ab$
   (b) montrer que $\left(a^2+ab+b^2\right)\wedge ab=1$
   (c) en déduire que $\left(a^2+ab+b^2\right)/2021$
2. on rappel que la décomposition en facteur premier de $2021=43.47$
   soit p un diviseur premier positif de $\left(a^2+ab+b^2\right)$ on a donc $p\in\{43,47\}$
   on suppose que $p=47$ donc $a^2+ab+b^2\equiv0[47]$
   (a) vérifier que $a^3\equiv b^3[47]$ en déduire $a^{45}\equiv b^{45}[47]$
   (b) montrer que $47\wedge a=1$ et $47\wedge b=1$ en déduire $a^{46}\equiv b^{46}[47]$
   (c) déduire que $3a^2\equiv0[47]$ et conclure $p\neq47$
3. montrer que $\left(a^2+ab+b^2\right)=43$ en déduire les valeurs de a et b
4. déduire les solutions de $\left(x^2+xy+y^2\right)z=2021xy$